

THESES DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentées

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI
ACADEMIE DE PARIS

par

Monsieur Philippe CIARLET

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PREMIERE THESE : Fonctions de green discrètes et principe du maximum discret.

DEUXIEME THESE : *(sur propositions données par l'Université) :*

Théorie de l'éclatement des tourbillons en fluide parfait,
d'après T. Brooke Benjamin.

soutenues le 5 novembre 1971 devant la Commission d'Examen

M. LIONS, *Président*

M. GUIRAUD,
Examineurs

M. TEMAM,

THESES DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentées

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

ACADEMIE DE PARIS

par

Monsieur Philippe CIARLET

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PREMIERE THESE : Fonctions de green discrètes et principe du maximum discret.

DEUXIEME THESE : *(sur propositions données par l'Université) :*

Théorie de l'éclatement des tourbillons en fluide parfait,
d'après T. Brooke Benjamin.

soutenues le 5 novembre 1971 devant la Commission d'Examen

M. LIONS, *Président*

M. GUIRAUD,
Examineurs

M. TEMAM,

THE UNIVERSITY OF LEIDEN

IN THE LIBRARY OF THE

UNIVERSITY OF LEIDEN



Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur LIONS, d'une part pour m'avoir encouragé à mener à bien ce travail, d'autre part pour avoir fortement contribué à assurer ma formation dans le domaine de l'Analyse Numérique.

Je remercie Monsieur TEMAM qui a bien voulu examiner ce travail et participer à ce jury.

Je remercie Monsieur GUIRAUD pour avoir bien voulu me proposer le sujet de seconde thèse.

*

* *

Je remercie Monsieur VARGA pour son initiation à l'Analyse Numérique et aussi pour une coopération scientifique et amicale très fructueuse. J'exprime ma reconnaissance à Monsieur PASQUET, qui a bien voulu me laisser le temps nécessaire au développement de cette recherche, ainsi qu'à tous mes amis du Service de Mathématiques du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, pour avoir su entretenir autour de moi une ambiance très sympathique. Enfin, je remercie Madame BUGLER pour la dactylographie de ce texte, à laquelle elle a apporté son dévouement habituel.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554017_0025

TABLE DES MATIERES

1. Préliminaires	1
2. Résumé des résultats	8
METHODE DE DIFFERENCES FINIES	
3. Principe du maximum discret pour les opérateurs aux différences finies	11
4. Fonctions de Green discrètes; consistance et principe du maximum discret	26
5. Analyse "fine" de l'erreur	35
METHODES D'APPROXIMATION VARIATIONNELLE	
6. Fonction de Green variationnelle discrète	41
7. Principe du maximum variationnel discret	45
8. Cas où le sous-espace V_n est engendré par les N premières fonctions propres.....	52
Bibliographie	57

1. PRELIMINAIRES.

Soit L un opérateur réel aux dérivées partielles du second ordre défini sur un ouvert borné et connexe de R^n , de frontière $\partial\Omega$. Le domaine de L contient par conséquent l'espace $C^2(\Omega)$, et pour chaque fonction $u \in C^2(\Omega)$, $Lu(x)$ est donné par une expression de la forme

$$(1.1) \quad Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + a(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

les fonctions a_{ij} , a_i et a étant définies sur Ω , et étant à valeurs réelles.

Un tel opérateur peut satisfaire à la propriété suivante :

(L_1) : L'opérateur L vérifie le principe du maximum (au sens classique) en ce sens que pour toute fonction $\phi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ vérifiant

$$(1.2) \quad L\phi(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

on a

$$(1.3) \quad \text{Max}\{\phi(x) | x \in \bar{\Omega}\} \leq \text{Max}\{0, \text{Max}\{\phi(x) | x \in \partial\Omega\}\}.$$

Le principe du maximum est vérifié par certains opérateurs elliptiques. Plus précisément, un opérateur tel que celui de (1.1) aura cette propriété si les trois conditions suffisantes suivantes sont simultanément vérifiées (cela résulte, par exemple, de la démonstration donnée dans [22, p. 326]):

- L'opérateur L est uniformément elliptique sur les sous-ensembles compacts de Ω , c'est-à-dire : quel que soit le compact $K \subset \Omega$, il existe une constante positive $\mu(K)$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu(K) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \text{ pour tout } x \in K \text{ et pour tout}$$

$$n\text{-vecteur } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

- quel que soit le compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C(K)$ telle que

$$|a_{ii}(x)|, |a_i(x)| \leq C(K), 1 \leq i \leq n, \text{ pour tout } x \in K \quad (1.1)$$

(on voit, en particulier, que les deux conditions ci-dessus sont vérifiées si les fonctions a_{ij} et a_i sont continues sur Ω , et si la matrice $(a_{ij}(x))$ est définie positive en tout point $x \in \Omega$; par conséquent, on n'exclut pas les opérateurs singuliers sur la frontière),

- et, enfin, l'opérateur L vérifie la propriété

(L_2) : Si l'on note par ξ la fonction identiquement égale à 1 sur Ω , alors

$$(1.4) \quad L\xi(x) \geq 0 \text{ (ou, de façon équivalente, } a(x) \geq 0) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Soit A un sous-ensemble quelconque de Ω . Pour toute fonction u définie sur A , on pose

$$(1.5) \quad \|u\|_A = \sup\{|u(x)| \mid x \in A\}.$$

Si un opérateur L vérifie le principe du maximum (L_1), toute fonction $\phi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ qui vérifie

$$(1.6) \quad L\phi(x) = 0, x \in \Omega,$$

est telle que

$$(1.7) \quad \|\phi\|_{\bar{\Omega}} \leq \|\phi\|_{\partial\Omega}$$

(cette dernière propriété est d'ailleurs parfois appelée principe du maximum).

Pour le vérifier, il suffit d'observer que, par (1.3),

$$\pm\phi(x) \leq \text{Max}\{0, \text{Max}\{\pm\phi(x) \mid x \in \partial\Omega\}\} \leq \|\phi\|_{\partial\Omega} \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega},$$

ce qui entraîne (1.7).

Le problème de Dirichlet (au sens classique) associé à l'opérateur L de (1.1) consiste, étant donné une fonction f définie sur Ω , et une fonction $g \in C^0(\partial\Omega)$, à trouver une solution $\phi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ de

$$(1.8) \quad Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(1.9) \quad u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Si les données sont assez régulières, la solution ϕ de (1.8)-(1.9) est donnée par

$$(1.10) \quad \phi(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} G_{\partial}(x, \xi) g(\xi) d\sigma_{\xi}, \quad x \in \bar{\Omega},$$

où G et G_{∂} sont les fonctions de Green, associées à l'opérateur L et aux conditions aux limites du type de Dirichlet de (1.9) ($G_{\partial}(x, \xi) = \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, \xi)$, où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désigne la dérivée conormale). L'expression (1.10) est une conséquence de la formule de Green

$$(1.11) \quad \phi(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) L\phi(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} G_{\partial}(x, \xi) \phi(\xi) d\sigma_{\xi}, \quad x \in \bar{\Omega},$$

qui est vraie pour toute fonction ϕ assez régulière. Si l'opérateur L satisfait le principe du maximum, la solution de (1.8)-(1.9) est unique et, de plus, les deux fonctions de Green définies ci-dessus sont nonnégatives sur leurs domaines de définition respectifs. Voir par exemple [34].

Pour terminer ce qui concerne le principe du maximum au sens classique, indiquons une autre propriété que peut vérifier l'opérateur L .

(L_3) : Il existe une constante K telle que pour toute fonction $\phi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, on ait

$$(1.12) \quad \|\phi\|_{\bar{\Omega}} \leq \|\phi\|_{\partial\Omega} + K \|L\phi\|_{\Omega}.$$

Ce sera le cas si l'opérateur L vérifie le principe du maximum (L_1) et s'il existe une fonction $\psi \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que

$$(1.13) \quad L\psi(x) \geq 1, \quad x \in \Omega,$$

$$(1.14) \quad \psi(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Pour le voir, il suffit d'appliquer le principe du maximum aux deux fonctions $\pm\phi - \|\phi\|_{\Omega} \psi$, ce qui donne (1.12) avec $K = \|\psi\|_{\bar{\Omega}}$.

En ce qui concerne l'existence d'une fonction ψ vérifiant (1.13)-(1.14), il suffit [22, p. 330] qu'il existe un indice i_0 et deux constantes positives μ et C telles que

$$0 < \mu \leq a_{i_0}(x), \text{ et } a_i(x) \leq C, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

On va examiner maintenant la formulation variationnelle du principe du maximum. Tout d'abord, précisons quelques notations. On notera $(.,.)$ le produit

scalaire usuel dans l'espace (réel) $L^2(\Omega)$ et par $\| \cdot \|$ la norme correspondante :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v dx, \quad \|u\| = \{(u, u)\}^{1/2}.$$

Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact contenu dans Ω , et soit $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions u qui sont dans $L^2(\Omega)$, ainsi que leurs dérivées partielles premières $D_i u$, $1 \leq i \leq n$, prises au sens des distributions. On notera $(\cdot, \cdot)_{H^1}$ et $\| \cdot \|_{H^1}$ le produit scalaire et la norme de $H^1(\Omega)$, qui sont respectivement données par

$$(u, v)_{H^1} = (u, v) + \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v), \quad \text{et} \quad \|u\|_{H^1} = \{(u, u)_{H^1}\}^{1/2}.$$

Enfin, on notera V l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (V est donc l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$). L'espace V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, et

$$\|u\|_V = \left\{ \sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2 \right\}^{1/2}$$

est une norme dans V , équivalente à la norme $\| \cdot \|_{H^1}$ (cf. [35, p. 13]).

On se donne un opérateur L tel que celui de (1.1) vérifiant de plus les hypothèses suivantes :

(H_1) : Le domaine de L contient $\mathcal{D}(\Omega)$, et $Lu \in L^2(\Omega)$ lorsque $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(H_2) : L'opérateur L est symétrique, en ce sens que

$$(1.15) \quad (Lu, v) = (u, Lv) \text{ pour tout } u, v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(H_3) : L'opérateur L est fortement coercitif (ou V-elliptique)

(cf. [35, p. 136]): il existe une constante positive K_1 telle que

$$(1.16) \quad K_1 (\|u\|_V)^2 \leq (Lu, u) \text{ pour tout } u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(H₄) : Il existe une constante K₂ telle que

$$(1.17) \quad |(Lu, v)| \leq K_2 \|u\|_V \|v\|_V \text{ pour tout } u, v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

L'inégalité (1.17) ci-dessus a pour conséquence que la forme bilinéaire continue $(Lu, v) : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ peut être prolongée en une forme bilinéaire continue $a(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Le problème de Dirichlet, dans sa formulation variationnelle, consiste alors, étant donné $f \in L^2(\Omega)$, à trouver $u \in V$ tel que

$$(1.18) \quad a(u, v) = (f, v), \text{ pour tout } v \in V.$$

Avec les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃) et (H₄), le problème (1.18) a une et une seule solution u (cf. par exemple [35, p.38], et on définit ainsi un opérateur linéaire

$$\mathcal{G} : f \in L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{G}f = u \in V \subset L^2(\Omega).$$

qui est continu. De plus, l'opérateur $\mathcal{G}$, considéré comme agissant de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact (cf. [35, Chapitre 1]).

Sous certaines conditions de régularité, on peut représenter l'opérateur $\mathcal{G}$ sous forme intégrale par

$$(1.19) \quad u(x) = \mathcal{G}f(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$G(x, \xi)$ étant la fonction de Green (cf. [1, 29, 30, 35]). De plus, sous les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃) et (H₄), cette fonction est nonnégative [1]:

$$(1.20) \quad G(x, \xi) \geq 0, \text{ pour } x \text{ et } \xi \in \bar{\Omega}.$$

ou, de façon équivalente,

$$(1.21) \quad f \geq 0 \text{ entraîne } u = \ell f \geq 0,$$

et la propriété ci-dessus constitue le principe du maximum variationnel (bien entendu, les inégalités ci-dessus sont maintenant à satisfaire seulement au sens du presque partout).

Le problème de valeurs propres, dans sa formulation variationnelle, consiste à trouver les couples (λ, ϕ) , $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi \in V$ et $\phi \neq 0$, tels que

$$(1.22) \quad a(\phi, v) = \lambda(\phi, v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Il existe (cf. [35]) une suite croissante de valeurs propres :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \text{ avec } \lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = +\infty,$$

et il existe une suite correspondante de fonctions propres $(\phi_i)_{i=1}^{\infty}$, i.e., telles que

$$(1.23) \quad a(\phi_i, v) = \lambda_i(\phi_i, v) \text{ pour tout } v \in V,$$

qu'on peut supposer orthonormalisées en ce sens que

$$(1.24) \quad a(\phi_i, \phi_j) = \lambda_i \delta_{ij} \text{ et } (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}.$$

2. RESUME DES RESULTATS.

Au §3, on commence par définir des opérateurs aux différences finies d'une façon très générale. Pour de tels opérateurs, on définit ensuite le principe du maximum discret (L_1^h) qui est l'analogue discret du principe du maximum (L_1) défini au §1. Lorsqu'on approche la solution du problème de Dirichlet (1.8)-(1.9) par l'intermédiaire d'opérateurs aux différences finies, on obtient une équation matricielle, et nous donnons trois critères (Théorèmes 1, 2 et 3), portant sur la matrice associée, qui assurent la validité du principe du maximum discret, la condition suffisante du Théorème 2 étant particulièrement utile dans les applications. En particulier, cette analyse montre que la notion familière de dominance diagonale est en fait trop restrictive mais que, par contre, c'est la propriété (L_2^h) (qui est l'analogue discret de la propriété (L_2)) qui joue un rôle essentiel.

Au §4, on commence par reformuler (Théorème 4) les résultats du §2 en utilisant les fonctions de Green discrètes qui sont les analogues discrets des fonctions de Green de (1.11). De la sorte, on donne un traitement systématique de propriétés démontrées dans de nombreux cas particuliers par Bramble et Hubbard, entre autres (cf. [4,5,6,7,8,9,10,11,12,25, 31]). On montre aussi (Corollaire 1) que (L_1^h) contient comme cas particulier le principe du maximum discret de Varga [40]. Ensuite, on considère l'analogue discret (L_3^h) pour une famille $(L^h)_h \in \mathcal{H}_\rho$ d'opérateurs et on donne (Proposition 1 et Théorème 5) deux critères simples qui en assure la validité lorsque les opérateurs L^h vérifient le principe du maximum discret. Après l'introduction de la notion familière de consistance pour une telle famille, on applique les résultats

précédents au problème de l'approximation de la solution du problème de Dirichlet (1.8)-(1.9), et on obtient ainsi (Théorème 6) une condition suffisante de convergence très générale pour la méthode d'approximation par les différences finies associée à l'opérateur L^h . Cette seconde partie du §3 n'est pas entièrement nouvelle. Ses résultats sont implicitement contenus dans [3 , chapitre 2] ou [24 , Section 23] par exemple. Cependant, nous avons choisi de présenter ces résultats, à cause de la généralité de leur énoncé.

Au §5, on examine l'ordre de convergence de ces méthodes, en supposant la solution de (1.8)-(1.9) suffisamment régulière. Il a été démontré dans de nombreux cas particuliers (cf. par exemple [4,5,7,8,9,11, 38]) que l'erreur de troncature locale peut être d'un ordre inférieur à l'ordre de l'erreur résultante. Dans le Théorème 7, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, ce qui constitue donc un traitement général et systématique de ce genre de propriété.

On peut également approcher la solution du problème de Dirichlet (1.8)-(1.9) où l'on suppose, par exemple, que $f \in L^2(\Omega)$, lorsque l'opérateur L vérifie les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) , en utilisant la méthode d'approximation variationnelle (cf. [13, 28, 33]) : si on se donne un sous-espace de dimension finie V_h de V , il existe alors une fonction $u_h \in V_h$ et une seule telle que

$$a(u_h, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in V_h.$$

Au §6, on commence par démontrer (Théorèmes 8 et 9) l'existence d'une fonction de Green variationnelle discrète G_h associée au sous-espace V_h , et

qui est telle que, comme en (1.19)

$$u_h(x) = \int_{\Omega} G_h(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Au §7, on définit le principe du maximum variationnel discret et on donne (Théorème 10) une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit vérifié, ainsi que l'application de ce résultat à la méthode des éléments finis (Théorème 11).

Remarquons que ces deux dernières questions (celles de l'existence d'une fonction de Green variationnelle discrète, et celle du principe du maximum variationnel discret) ne semblent pas, à notre connaissance, avoir été déjà abordées dans la littérature.

Au §8, nous donnons quelques propriétés particulières (Théorème 12) au cas où le sous-espace V_h est engendré par les N premières fonctions propres de l'opérateur L , et nous signalons à ce propos deux problèmes ouverts.

Enfin, plusieurs exemples pratiques d'application des divers résultats sont examinés dans le cours du texte.

Certains résultats de ce travail paraîtront dans [14] et [15]. Le cas unidimensionnel est traité en détail dans [18], et nous n'en parlerons pas ici.

3. PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET POUR LES OPERATEURS AUX DIFFERENCES FINIES.

Les schémas aux différences finies utilisés en analyse numérique peuvent être considérés comme des cas particuliers de la formulation générale suivante.

Etant donné un paramètre h (qui est un nombre > 0), on construit deux sous-ensembles finis et disjoints de points de R^n . L'un de ces ensembles (celui des "noeuds intérieurs") est formé de N points et sera noté Ω^h et l'autre ensemble (celui des "noeuds-frontière") est formé de N^{∂} points et sera noté $\partial\Omega^h$. Enfin, on posera

$$\bar{\Omega}^h = \Omega^h \cup \partial\Omega^h, \text{ et } \bar{N} = N + N^{\partial}.$$

Il faut remarquer que, pour l'instant, les ensembles Ω^h et $\partial\Omega^h$ sont absolument quelconques, et en particulier, ils ne sont pas assujettis à être en relation avec un ouvert de R^n .

Soit X (respectivement X^{∂} , $\bar{X}$) l'espace vectoriel des fonctions (à valeurs réelles) définies sur Ω^h (respectivement $\partial\Omega^h$, $\bar{\Omega}^h$), et donc de dimension N (respectivement N^{∂} , $\bar{N}$). On peut identifier les espaces X et X^{∂} à des sous-espaces de $\bar{X}$, de telle sorte que $\bar{X}$ soit leur somme directe $\bar{X} = X \oplus X^{\partial}$, chaque vecteur $\bar{u} \in \bar{X}$ pouvant se mettre d'une et d'une seule façon sous la forme $\bar{u} = u + u^{\partial}$, avec $u \in X$ et $u^{\partial} \in X^{\partial}$.

Un opérateur aux différences finies L^h associé aux ensembles Ω^h de noeuds intérieurs et $\partial\Omega^h$ de noeuds-frontière est, par définition, un opérateur linéaire qui applique $\bar{X}$ dans X :

$$L^h : \bar{X} \rightarrow X.$$

Là encore, on ne suppose pas que l'opérateur L^h approche, d'une façon ou d'une autre, un opérateur elliptique.

On va supposer, uniquement pour fixer les idées, que les points de Ω^h et de $\partial\Omega^h$ ont été numérotés. Le numérotage effectivement choisi n'a pas d'importance en ce qui nous concerne ici, mais il faut signaler qu'il joue un grand rôle dès qu'on s'intéresse à la résolution des systèmes matriciels associés (cf. [39 , p. 187]). On écrira donc tout vecteur $\bar{u} \in \bar{X}$ sous la forme

$$(3.1) \quad \bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N; u_1^\partial, u_2^\partial, \dots, u_{N^\partial}^\partial),$$

avec

$$(3.2) \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in X, \text{ et } u^\partial = (u_1^\partial, u_2^\partial, \dots, u_{N^\partial}^\partial) \in X^\partial.$$

Etant donné un opérateur aux différences finies L^h , il résulte de la définition donnée plus haut que pour tout $\bar{u} \in \bar{X}$, les composantes du vecteur $L^h \bar{u} \in X$ sont de la forme :

$$(3.3) \quad (L^h \bar{u})_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{N^\partial} a_{ij}^\partial u_j^\partial, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Etant donné un vecteur quelconque $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ de X et un vecteur quelconque $g^\partial = (g_1^\partial, g_2^\partial, \dots, g_{N^\partial}^\partial)$ de X^∂ , le problème de Dirichlet discret consiste à trouver $\bar{u} \in \bar{X}$ tel que

$$(3.4) \quad L^h \bar{u} = f,$$

$$(3.5) \quad P^\partial \bar{u} = g^\partial,$$

où P^∂ est le projecteur qui, à tout $\bar{u} \in \bar{X}$ de la forme (3.1), associe sa projection u^∂ sur X^∂ donnée en (3.2). Les deux équations (3.4)-(3.5) représentent

un système de $\bar{N}$ équations linéaires qui sont :

$$(3.6) \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j + \sum_{j=1}^N a_{ij}^{\partial} u_j^{\partial} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$(3.7) \quad u_i^{\partial} = g_i^{\partial}, \quad 1 \leq i \leq N^{\partial},$$

que l'on écrira sous la forme d'une équation matricielle

$$(3.8) \quad \bar{A} \bar{u} = \bar{f},$$

où

$$(3.9) \quad \bar{A} = \begin{array}{c|c} A & A^{\partial} \\ \hline O & I \end{array} \begin{array}{c} N \times N \\ N^{\partial} \times N \end{array} \begin{array}{c} N \times N^{\partial} \\ N^{\partial} \times N^{\partial} \end{array}, \quad \bar{u} = \begin{array}{c} u \\ u^{\partial} \end{array}, \quad \bar{f} = \begin{array}{c} f \\ f^{\partial} \end{array},$$

et

$$(3.10) \quad A = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad \text{et} \quad A^{\partial} = (a_{ij}^{\partial}), \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N^{\partial}.$$

On peut évidemment éliminer les N^{∂} dernières inconnues, et on obtient ainsi le système suivant pour les N premières inconnues :

$$(3.11) \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = f_i - \sum_{j=1}^{N^{\partial}} a_{ij}^{\partial} g_j^{\partial}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle

$$(3.12) \quad Au = f - A^{\partial} g^{\partial}.$$

La matrice $\bar{A}$ est régulière si et seulement si la matrice A est régulière et, dans ce cas, la matrice inverse $\bar{G}$ de $\bar{A}$ se met sous la forme

$$(3.13) \quad A^{-1} = \bar{G} = \begin{array}{c|c} G & G^{\partial} \\ \hline N \times N & N \times N^{\partial} \\ \hline 0 & I \\ N^{\partial} \times N & N^{\partial} \times N^{\partial} \end{array},$$

et l'on a les relations

$$(3.14) \quad G = A^{-1}, \text{ et } G^{\partial} = -A^{-1} A^{\partial}.$$

Par analogie avec le principe du maximum (L_1) pour les opérateurs elliptiques, nous définissons la propriété suivante pour l'opérateur aux différences finies L^h de (3.3) :

(L_1^h) : L'opérateur L^h vérifie le principe du maximum discret (par rapport à la décomposition $\bar{X} = X \oplus X^{\partial}$) en ce sens que pour tout $\bar{u} \in \bar{X}$ vérifiant

$$(3.15) \quad (L^h \bar{u})_i \leq 0, \quad 0 \leq i \leq N,$$

on a

$$(3.16) \quad \text{Max}\{u_i \mid 1 \leq i \leq N\} \leq \text{Max}\{0, \text{Max}\{u_i^{\partial} \mid 1 \leq i \leq N^{\partial}\}\}.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 1. L'opérateur L^h vérifie le principe du maximum discret (L_1^h)

si et seulement si les deux conditions matricielles suivantes sont satisfaites :

(A₁) : La matrice $\bar{A}$ de (3.9) est monotone, c'est-à-dire que la matrice $\bar{A}$ est régulière et que son inverse est une matrice à éléments tous ≥ 0 :

$$(3.17) \quad A^{-1} = \bar{G} \geq 0,$$

et par ailleurs,

(G₁) : Si l'on appelle $\bar{\xi} = \xi + \xi^\partial$ le vecteur de $\bar{X}$ dont toutes les composantes sont égales à 1,

$$(3.18) \quad G^\partial \xi^\partial \leq \xi,$$

où $G^\partial = -A^{-1}A^\partial$ (cf. (3.14)).

Démonstration. Supposons d'abord que l'opérateur L^h vérifie le principe du maximum discret (L_1^h). Alors la matrice $\bar{A}$ de (3.9) est régulière: En effet, il suffit de démontrer que la matrice A de (3.10) est aussi régulière, comme on l'a déjà observé. Soit donc $u \in X$ tel que $Au = 0$ (où 0 est le vecteur nul de X). Le vecteur $\bar{v} = u + 0^\partial$ (où 0^∂ est le vecteur nul de X^∂) est tel que $L^h \bar{v} = 0$. Donc $\pm u \leq 0$ (par (3.15)-(3.16)), d'où $u = 0$, ce qui montre que A , et donc aussi $\bar{A}$, est régulière.

Il résulte du partitionnement (3.13) de la matrice $\bar{G} = \bar{A}^{-1}$ que l'on a l'identité

$$(3.19) \quad u = GL^h \bar{u} + G^\partial u^\partial \text{ pour tout vecteur } \bar{u} = u + u^\partial \in \bar{X}.$$

Posons

$$(3.20) \quad G = (g_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq N, \text{ et } G^\partial = (g_{ij}^\partial), \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N^\partial.$$

Pour chaque indice $j = 1, 2, \dots, N$, le vecteur $g_j = (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{Nj})$ est la projection sur X de la solution unique du système (3.4)-(3.5) correspondant au vecteur $f \in X$ de X dont toutes les composantes sont nulles, sauf la j -ème qui vaut 1, et au vecteur $g^\partial = 0^\partial$. Il résulte alors de (3.15)-(3.16) que $g_j \geq 0$, ce qui montre que la matrice G est ≥ 0 .

De la même façon, pour chaque indice $g = 1, 2, \dots, N^\partial$, le vecteur $g_j^\partial = (g_{1j}^\partial, g_{2j}^\partial, \dots, g_{Nj}^\partial)$ est la projection sur X de la solution unique du système (3.4)-(3.5) correspondant au vecteur $f = 0$, et au vecteur g^∂ de X^∂ dont toutes les composantes sont nulles sauf la j -ème qui vaut 1. Il résulte alors de (3.15)-(3.16) que $g_j^\partial \geq 0$, ce qui montre que la matrice G^∂ est ≥ 0 . On a donc démontré la propriété (A_1) .

Démontrons maintenant la propriété (G_1) . Le vecteur $g = \sum_{j=1}^{N^\partial} g_j^\partial$, les vecteurs g_j^∂ étant définis comme ci-dessus, est la projection sur X de la solution unique de (3.4)-(3.5) correspondant au vecteur $f = 0$ et au vecteur $g^\partial = (1, 1, \dots, 1) = \xi^\partial$. Il résulte alors de (3.15)-(3.16) que toutes les composantes du vecteur g sont ≤ 1 . Comme $g = G^\partial \xi^\partial$, ceci démontre (3.18).

Réciproquement, supposons que les deux propriétés (A_1) et (G_1) soient vérifiées. La matrice $\bar{A}$ étant régulière, on peut appliquer l'identité (3.19). Autrement dit, pour tout vecteur $\bar{u} \in \bar{X}$ de la forme (3.1), on a

$$(3.21) \quad u_i = \sum_{j=1}^N g_{ij} (L^h \bar{u})_j + \sum_{j=1}^{N^\partial} g_{ij}^\partial u_j^\partial, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Dans ces conditions, tout vecteur $\bar{u} \in \bar{X}$ qui vérifie (3.15) vérifie aussi (3.16). En effet,

$$g_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad \text{et} \quad g_{ij}^\partial \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N^\partial \quad \text{par} \quad (A_1),$$

et

$$\sum_{j=1}^{N^0} \xi_{ij}^0 \leq 1, 1 \leq i \leq N, \text{ par } (G_1),$$

ce qui achève la démonstration.

Q.E.D.

Dans la pratique, la condition (G_1) du Théorème 1 risque de ne pas être facile à vérifier. C'est pourquoi nous donnons maintenant (condition (A_2) du Théorème 2) une autre condition, qui est cette fois triviale à vérifier, et qui, jointe à la condition (A_1) du Théorème 1, assure la validité du principe du maximum discret (L_1^h) . La conjonction des deux conditions (A_1) et (A_2) est seulement une condition suffisante pour (L_1^h) , mais, comme on le verra sur des exemples, elle s'applique tout de même aux cas les plus couramment rencontrés.

Théorème 2. L'opérateur L^h vérifie le principe du maximum discret (L_1^h) si les deux conditions matricielles suivantes sont vérifiées :

(A_1) : la matrice $\bar{A}$ de (3.9) est monotone,

(A_2) : la somme des éléments de chaque ligne de la matrice $\bar{A}$ est nonnégative:

$$(3.22) \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} + \sum_{j=1}^{N^0} a_{ij}^0 \geq 0, 1 \leq i \leq N.$$

Démonstration. Notons encore par $\bar{\xi} = \xi + \xi^0$ le vecteur de $\bar{X}$ dont toutes les composantes sont égales à 1. La condition (A_2) s'écrit :

$$A\xi + A^0 \xi^0 \geq 0.$$

Comme par ailleurs la matrice $A^{-1} = G$ est ≥ 0 (puisque c'est une sous-matrice de la matrice nonnégative $\bar{A}^{-1}$), on en déduit, en multipliant l'inégalité

ci-dessus à gauche par A^{-1} , que

$$\xi + A^{-1}A^{\partial\partial}\xi \geq 0, \text{ et donc que } \xi \geq -A^{-1}A^{\partial\partial}\xi = G^{\partial\partial}\xi,$$

ce qui n'est pas autre chose que la condition (G_1) du Théorème, qu'il suffit ensuite d'appliquer pour conclure.

Q.E.D.

On peut remarquer que la condition matricielle (A_2) est équivalente à une propriété de l'opérateur (L^h) , qui est l'analogue discret de la propriété (L_2) du § 1 :

(L_2^h) : Si $\bar{\xi}$ est le vecteur de $\bar{X}$ dont toutes les composantes sont égales à 1, alors

$$(3.23) \quad L^h \bar{\xi} \geq 0.$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, le principe du maximum discret n'implique pas nécessairement la validité de (A_2) . Ainsi par exemple, la matrice

$$\bar{A} = \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$$

partitionnée comme en (3.9) vérifie (A_1) puisque

$$\bar{A}^{-1} = \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \geq 0,$$

et elle vérifie (G_1) puisque $G^{\partial} = 0$. Par suite, l'opérateur L^h associé vérifie

le principe du maximum discret. Cependant, la condition (A_2) n'est pas vérifiée.

Les conditions $(A_1)-(G_1)$ du Théorème 1 et les conditions $(A_1)-(A_2)$ du Théorème 2 sont indépendantes du numérotage des points de Ω^h et de $\partial\Omega^h$. Ceci n'est pas étonnant, puisque le principe du maximum discret (L_1^h) est lui-même indépendant du numérotage des points.

Le Théorème 2 s'applique à de nombreux schémas aux différences finies. En particulier, on peut généraliser la définition des opérateurs nonnégatifs [24, p. 181], et celle des équations de type monotone [21, p. 43] de la façon suivante.

On dira qu'un opérateur aux différences finies (L^h) est de type nonnégatif généralisé lorsque la matrice associée $\bar{A}$ possède les trois propriétés suivantes :

- les coefficients diagonaux a_{ii} , $1 \leq i \leq N$, de la matrice A de (3.10) sont > 0 , les coefficients hors diagonaux a_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$, $i \neq j$, de la même matrice sont ≤ 0 , et les coefficients a_{ij} , $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N^\partial$, de la matrice A^∂ de (3.10) sont ≤ 0 ,

- la matrice $\bar{A}$ est diagonalement dominante [39, p. 23], et

- la matrice A de (3.10) est irréductiblement diagonalement dominante [39, p. 23].

On peut alors démontrer le

Théorème 3. Si l'opérateur L^h est de type nonnégatif généralisé, il vérifie le principe du maximum discret (L_1^h) .

Démonstration. La matrice A étant irréductiblement diagonalement dominante, et ayant ses éléments diagonaux > 0 et ses coefficients hors-diagonaux ≤ 0 , il en résulte que $A^{-1} \geq 0$ [39, p. 85]. Par ailleurs, puisque $A^{\partial} \leq 0$, on en déduit que $G^{\partial} = -A^{-1}A^{\partial} \geq 0$, et donc que la matrice $\bar{A}$ est monotone (condition (A_1)). Comme enfin la dominance diagonale de la matrice $\bar{A}$ équivaut (dans le cas où L^h est de type nonnégatif généralisé) à la condition (A_2) , le principe du maximum discret se trouve donc vérifié, par application du Théorème 2.

Q.E.D.

Pour illustrer les résultats précédents, prenons tout d'abord un exemple très simple, celui de l'approximation numérique du problème de Dirichlet

$$(3.24) \quad Lu(x) \equiv -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$(3.25) \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta,$$

où l'on suppose que $a(x) \geq 0$, $0 < x < 1$. Posant $h = (N+1)^{-1}$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N+1$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq N$, on peut approcher la solution de (3.24)-(3.25) par le schéma classique à trois points

$$(3.26) \quad (L^h u)_i = \frac{-u_{i-1} + (2+a_i h^2)u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$(3.27) \quad u_0 = \alpha, \quad u_{N+1} = \beta,$$

qui est donc bien un cas particulier de (3.6)-(3.7). Avec le numérotage ci-dessus, on a $\Omega^h = \bigcup_{i=1}^N \{x_i\}$, et $\partial\Omega^h = \{x_0\} \cup \{x_{N+1}\}$, et les matrices

$\bar{A} ((N+2) \times (N+2))$ de (3.9) et $A(N \times N)$ de (3.10) sont respectivement données par

$$\bar{A} = \frac{1}{h^2} \begin{vmatrix} h^2 & & & & \\ -1 & 2+a_1 h^2 & -1 & & \\ & -1 & 2+a_2 h^2 & -1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & -1 & 2+a_N h^2 & -1 \\ & & & & & & h^2 \end{vmatrix},$$

(3.28)

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{vmatrix} 2+a_1 h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2+a_2 h^2 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 2+a_N h^2 \end{vmatrix}.$$

Comme l'opérateur L^h défini par les équations (3.26) est de type nonnégatif généralisé, il vérifie donc le principe du maximum discret, d'après le Théorème 3.

Considérons maintenant l'approximation du même problème (3.24)-(3.25) par le schéma en $O(h^4)$ de Bramble et Hubbard [8] défini par les équations :

$$\begin{aligned}
 (L^h \bar{u})_1 &= \frac{-u_0 + (2+a_1 h^2)u_1 - u_2}{h^2}, \\
 (3.29) \quad (L^h \bar{u})_i &= \frac{u_{i-2} - 16u_{i-1} + (30+12a_1 h^2)u_i - 16u_{i+1} + u_{i+2}}{12h^2}, \quad 2 \leq i \leq N-1, \\
 (L^h \bar{u})_N &= \frac{-u_{N-1} + (2+a_N h^2)u_N - u_{N+1}}{h^2},
 \end{aligned}$$

$$(3.30) \quad u_0 = \alpha, \quad u_{N+1} = \beta.$$

La matrice $(N+2) \times (N+2)$ correspondaute $\bar{A}$ est donnée par

$$(3.31) \quad \bar{A} = \frac{1}{h^2} \begin{vmatrix}
 h^2 & & & & & \\
 -1 & 2+a_1 h^2 & -1 & & & \\
 \frac{1}{12} & \frac{-16}{12} & \frac{30}{12}+a_2 h^2 & \frac{-16}{12} & \frac{1}{12} & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \frac{1}{12} & \frac{-16}{12} & \frac{30}{12}+a_N h^2 & \frac{-16}{12} & \frac{1}{12} \\
 & & & -1 & 2+a_N h^2 & -1 \\
 & & & & & h^2
 \end{vmatrix}$$

Le schéma ci-dessus n'est pas de type nonnégatif généralisé. Cependant, la matrice $\bar{A}$ de (3.31) est monotone pour h suffisamment petit [8 , Théorème 2] et puisque par ailleurs la condition (A_2) du Théorème 2 est satisfaite, on en déduit que l'opérateur (L^h) défini par les équations (3.29) satisfait

encore le principe du maximum discret.

On peut également considérer un problème un peu plus général, l'équation (3.24) étant remplacée par

$$(3.24') \quad Lu(x) \equiv -u''(x) + a_1(x)u'(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

où l'on suppose encore que $a(x) \geq 0$, $0 < x < 1$. On peut appliquer à ce problème un schéma en $O(h^4)$ dont la matrice $\bar{A}$ associée est monotone pour h suffisamment petit [37] et, la condition (A_2) étant également vérifiée, l'opérateur (L^h) associé, satisfait le principe du maximum discret.

Comme autre exemple, considérons l'approximation numérique du problème de Dirichlet

$$(3.32) \quad Lu(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$(3.33) \quad u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$

où Ω est un ouvert borné connexe du plan, et $L = -\Delta$. On établit un maillage uniforme dans les deux directions, de pas h . L'ensemble Ω^h est formé par les noeuds du réseau qui sont dans Ω , et l'ensemble $\partial\Omega^h$ est formé par les points d'intersection de $\partial\Omega$ avec les lignes du réseau. Etant donné un point

$P = (x,y) \in \Omega^h$, soit P_i , $1 \leq i \leq 4$, les quatre points les plus voisins de P . $\bar{\Omega}^h = \Omega^h \cup \partial\Omega^h$ donnés par $P_1 = (x+h_1,y)$, $P_2 = (x,y+h_2)$, $P_3 = (x-h_3,y)$ et $P_4 = (x,y-h_4)$, avec $0 < h_i \leq h$, $1 \leq i \leq 4$. On définit l'opérateur L^h par

$$\begin{aligned}
 L^h u(P) = & - \frac{2}{h_1(h_1+h_3)} u(P_1) - \frac{2}{h_2(h_2+h_4)} u(P_2) \\
 (3.34) \quad & - \frac{2}{h_3(h_3+h_1)} u(P_3) - \frac{2}{h_4(h_4+h_2)} u(P_4) \\
 & + \left(\frac{2}{h_1 h_3} + \frac{2}{h_2 h_4} \right) u(P), \text{ pour tout } P \in \Omega^h,
 \end{aligned}$$

et le problème de Dirichlet discret consiste à résoudre

$$(3.35) \quad L^h u(P) = f(P), \quad P \in \Omega^h,$$

$$(3.36) \quad u(P) = g(P), \quad P \in \partial\Omega^h.$$

L'opérateur L^h défini par (3.34) est de type nonnégatif généralisé, pour h suffisamment petit (afin que la matrice associée A soit irréductible), et par conséquent, le principe du maximum discret est vérifié.

Les résultats de ce § montrent que la distinction entre les deux matrices $\bar{A}$ de (3.9) et A de (3.10) est essentielle. En effet, il peut fort bien se faire que la matrice A soit monotone, sans que la "grande" matrice $\bar{A}$ le soit, auquel cas le principe du maximum discret n'est pas vérifié d'après le Théorème 1.

Par ailleurs, si l'on veut appliquer les résultats de ce §, il faut disposer de critères assurant qu'une matrice donnée $B = (b_{ij})$ est monotone. On trouve de tels critères dans la littérature [8, 20, 21, 31, 39] pour les matrices B telles que $b_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$. Lorsqu'elles sont monotones, de telles matrices sont appelées des M -matrices [39, p. 85], ou des matrices de Stieltjes [39, p. 85] si elles sont de plus symétriques.

Bramble et Hubbard ([7 , Théorème 2.3], [9 , Théorèmes 2.6 et 2.7]) et Price [37, 38] ont donné d'autres critères particulièrement utiles pour affirmer qu'une matrice est monotone, même si elle n'est pas une M-matrice. Leurs résultats s'appliquent particulièrement bien aux matrices associées à des schémas aux différences finies d'ordre élevé, tels que celui de (3.29). Mentionnons également une conséquence intéressante d'un théorème de Aronszajn et Smith [1] : Si $B = (b_{ij})$ est une matrice $k \times k$ symétrique définie positive, alors elle est monotone si et seulement si pour tout vecteur $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, il existe un vecteur $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_k)$ tel que

$$\tilde{u}_i \geq |u_i|, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$\sum_{i,j=1}^k a_{ij} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \leq \sum_{i,j=1}^k a_{ij} u_i u_j$$

(dans le cas d'une matrice de Stieltjes, il suffit de prendre $\tilde{u}_i = |u_i|$, $1 \leq i \leq k$).

Enfin, l'analyse de ce § montre que la condition matricielle (A_2) (ou sa formulation équivalente (L_2^h)) est plus importante que la notion habituelle de dominance diagonale. A l'exception du cas des opérateurs de type nonnégatif généralisé, où ces deux notions coïncident, la dominance diagonale n'est pas satisfaite en général, alors que la condition (A_2) a toujours lieu, ce qui permet d'appliquer la condition suffisante du Théorème 2. Ce sera le cas en particulier pour les opérateurs aux différences finies d'ordre élevé correspondant à des opérateurs aux dérivées partielles qui vérifie la propriété (L_2) .

4. FONCTIONS DE GREEN DISCRETES ; CONSISTANCE ET PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET.

Il est plus commode pour la suite d'introduire de nouvelles notations, qui seront très voisines de celles employées pour le problème non discrétisé. Les notations utilisées au § 3 avaient l'avantage d'être bien adaptées au langage matriciel, alors que désormais nous allons raisonner en termes d'opérateurs.

L'espace X (respectivement $X^\partial, \bar{X}$) du § 3 sera noté $C(\Omega^h)$ (respectivement $C(\partial\Omega^h), C(\bar{\Omega}^h)$), et un vecteur, ou une fonction, u de cet espace sera défini par ses valeurs $u(P)$ aux points P de Ω^h (respectivement de $\partial\Omega^h$, de $\bar{\Omega}^h$). Un opérateur L^h aux différences finies tel que celui de (3.3) est donc un opérateur linéaire qui applique $C(\bar{\Omega}^h)$ dans $C(\Omega^h)$, et en chaque point $P \in \Omega^h$, on a

$$(4.1) \quad L^h u(P) = \sum_{Q \in \bar{\Omega}^h} a^h(P, Q) u(Q),$$

formule qui remplace (3.3). Remarquons que l'indice h figure maintenant dans les coefficients de L^h , aussi bien que dans la nouvelle définition des espaces.

Le problème de Dirichlet discret consiste maintenant à trouver $u \in C(\bar{\Omega}^h)$ tel que

$$(4.2) \quad L^h u(P) = f^h(P), \quad P \in \Omega^h,$$

$$(4.3) \quad u(P) = g^h(P), \quad P \in \partial\Omega^h,$$

où $f^h \in C(\Omega^h)$ et $g^h \in C(\partial\Omega^h)$.

Supposons que l'opérateur L^h défini en (4.1) satisfasse le principe du maximum discret, c'est-à-dire que tout $u \in C(\bar{\Omega}^h)$ vérifiant

$$(4.4.) \quad L^h u(P) \leq 0, \quad P \in \Omega^h,$$

est tel que

$$(4.5) \quad \text{Max}\{u(P) | P \in \bar{\Omega}^h\} \leq \text{Max}\{0, \text{Max}\{u(P) | P \in \partial\Omega^h\}\}.$$

Alors le problème de Dirichlet discret (4.2)-(4.3) a toujours une et une seule solution. En effet, choisissons un numérotage quelconque des points de Ω^h et de $\partial\Omega^h$. Puisque l'opérateur L^h vérifie le principe du maximum discret, la matrice $\bar{A}$ correspondante est régulière et donc le problème (4.2)-(4.3) a toujours une et une seule solution.

En particulier, pour $Q \in \Omega^h$ fixé, le problème

$$(4.6) \quad L^h u(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \neq Q \\ 1 & \text{si } P = Q \end{cases}, \quad P \in \Omega^h,$$

$$(4.7) \quad u(P) = 0, \quad P \in \partial\Omega^h,$$

a une solution unique :

$$P \in \bar{\Omega}^h \rightarrow G^h(P, Q),$$

et pour $Q \in \partial\Omega^h$ fixé, le problème

$$(4.8) \quad L^h u(P) = 0, \quad P \in \Omega^h,$$

$$(4.9) \quad u(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \neq Q \\ 1 & \text{si } P = Q \end{cases}, \quad P \in \partial\Omega^h.$$

a une solution unique :

$$P \in \bar{\Omega}^h \rightarrow G_{\partial}^h(P, Q).$$

Par analogie avec le problème non discrétisé, les deux fonctions ci-dessus sont appelées les fonctions de Green discrètes (associées à l'opérateur L^h).

On a alors le résultat suivant :

Théorème 4. Supposons que l'opérateur L^h satisfasse le principe du maximum discret. Alors, d'une part,

$$(4.10) \quad G^h(P, Q) \geq 0, \quad P \in \bar{\Omega}^h, \quad Q \in \Omega^h,$$

$$(4.11) \quad G_{\partial}^h(P, Q) \geq 0, \quad P \in \bar{\Omega}^h, \quad Q \in \partial\Omega^h,$$

$$(4.12) \quad 0 \leq \sum_{Q \in \partial\Omega^h} G_{\partial}^h(P, Q) \leq 1, \quad \text{pour tout } P \in \bar{\Omega}^h.$$

D'autre part, pour tout $u \in C(\bar{\Omega}^h)$, on a l'identité de Green discrète (qui est l'analogue discret de (1.11)) :

$$(4.13) \quad u(P) = \sum_{Q \in \Omega^h} G^h(P, Q) L^h u(Q) + \sum_{Q \in \partial\Omega^h} G_{\partial}^h(P, Q) u(Q), \quad \text{pour tout } P \in \bar{\Omega}^h.$$

Démonstration. Pour $Q \in \Omega^h$ fixé (respectivement pour $Q \in \partial\Omega^h$ fixé), la fonction $P \in \bar{\Omega}^h \rightarrow G^h(P, Q)$ (respectivement la fonction $P \in \bar{\Omega}^h \rightarrow G_{\partial}^h(P, Q)$) est en correspondance biunivoque avec un des N premiers vecteurs colonnes (respectivement un des N^{∂} derniers vecteurs colonnes) de la matrice $\bar{G}$ de (3.13). Dans ces conditions, les inégalités (4.10)-(4.11) sont équivalentes à la nonnégalité de la matrice $\bar{G}$, et l'inégalité (4.12) est équivalente à l'inégalité (3.18). Enfin, l'identité de Green discrète (4.13) est équivalente à l'identité (3.19).

Q.E.D.

Remarquons au passage qu'il est fréquent, dans la littérature, de faire apparaître un facteur h^n dans la fonction de Green G^h ce qui suggère l'analogie avec la première intégrale figurant dans (3.19).

Comme autre conséquence du principe du maximum discret, on a le résultat suivant, que Varga [40] appelle le principe du maximum discret.

Corollaire 1. Supposons que l'opérateur L^h satisfait le principe du maximum discret. Alors tout vecteur $u \in C(\bar{\Omega}^h)$ qui vérifie

$$(4.14) \quad L^h u(P) = 0, P \in \Omega^h,$$

est tel que (cf. (1.5) pour la notation) :

$$(4.15) \quad \|u\|_{\bar{\Omega}^h} \leq \|u\|_{\partial\Omega^h}.$$

Démonstration. Il suffit de raisonner comme pour la démonstration de (1.7).

Q.E.D.

Puisque les divers espaces considérés sont de dimension finie, il existe une constante $\mathcal{K}^h$ telle que l'on ait

$$(4.16) \quad \|u\|_{\bar{\Omega}^h} \leq \|u\|_{\partial\Omega^h} + \mathcal{K}^h \|L^h u\|_{\Omega^h} \text{ pour tout } u \in C(\bar{\Omega}^h),$$

cette inégalité résultant de l'identité (4.13). Etant donné une famille de paramètres h , on va se poser maintenant la question de savoir quand on peut avoir une inégalité analogue à celle de (4.16), mais où la constante $\mathcal{K}^h$ peut être remplacée par une constante $\mathcal{K}'$ indépendante de h . Ceci nous conduit à définir une nouvelle propriété (qui n'est pas autre chose qu'une propriété

de stabilité) pour une famille d'opérateurs aux différences finies, et qui est l'analogue discret de la propriété (L_3) considérée au § 1 :

(L_3^h) : Etant donné une famille $(L^h)_h \in \mathcal{K}_0$ d'opérateurs aux différences finies, il existe une constante $\mathcal{K}'$ telle que pour tout $h \in \mathcal{K}_0$, et pour tout $u \in C(\bar{\Omega}^h)$, on ait

$$(4.17) \quad \|u\|_{\bar{\Omega}^h} \leq \|u\|_{\partial\Omega^h} + \mathcal{K}' \|L^h u\|_{\Omega^h}.$$

On a alors le critère suivant (qui sera amélioré au §5; cf Théorème 7) :

Proposition 1. Soit $(L^h)_h \in \mathcal{K}_0$ une famille d'opérateurs qui vérifient le principe du maximum discret (L_1^h) . Une telle famille vérifie la propriété (L_3^h) si et seulement si la solution (unique) $v^h \in C(\bar{\Omega}^h)$ de

$$(4.18) \quad L^h u(P) = 1, P \in \Omega^h,$$

$$(4.19) \quad u(P) = 0, P \in \partial\Omega^h,$$

vérifie

$$(4.20) \quad \|v^h\|_{\bar{\Omega}^h} \leq \mathcal{K}' \text{ pour tout } h \in \mathcal{K}_0.$$

Démonstration. De (4.6)-(4.7), il résulte que la solution de (4.18)-(4.19) est donnée par

$$v^h(P) = \sum_{Q \in \Omega^h} G^h(P, Q), P \in \bar{\Omega}^h,$$

et il résulte de (4.10) que

$$\|v^h\|_{\bar{\Omega}^h} = \max_{P \in \bar{\Omega}^h} \left\{ \sum_{Q \in \Omega^h} G^h(P, Q) \right\}.$$

Supposons d'abord que l'inégalité (4.20) ait lieu. Alors l'inégalité (4.17) est une conséquence des inégalités (4.12) et (4.20) utilisées dans l'identité (4.13).

Réciproquement, si l'inégalité (4.17) est vérifiée, il suffit de l'appliquer à la fonction v^h et d'utiliser les relations (4.18)-(4.19).

Q.E.D.

Pour une matrice $B = (b_{ij})$ ($k \times l$), posons

$$(4.21) \quad \|B\|_{\infty} = \text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^l |a_{ij}| \mid 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Alors, pour un opérateur L^h qui vérifie le principe du maximum discret, la propriété (G_1) du Théorème 1 (équivalente à (4.12)) est équivalente à la propriété matricielle suivante :

$$(4.22) \quad (G_2) : \quad \|G^{\partial}\|_{\infty} = \text{Max}_{P \in \Omega^h} \left\{ \sum_{Q \in \partial\Omega^h} G_{\partial}^h(P, Q) \right\} \leq 1,$$

et, de même, la propriété (L_3^h) du Théorème 6 est équivalente à la propriété matricielle :

$$(4.23) \quad (G_3) : \quad \|G\|_{\infty} = \text{Max}_{P \in \Omega^h} \left\{ \sum_{Q \in \Omega^h} G^h(P, Q) \right\} \leq \mathcal{K}_0' \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}_0,$$

où les matrices G^{∂} et G sont celles de (3.14).

Avant d'introduire la notion de consistance, nous allons faire dorénavant les hypothèses suivantes :

- La famille $\mathcal{H}_0$ des paramètres h (qui sont des nombres > 0) admet 0 comme unique point d'accumulation,

- Les ensembles Ω^h et $\partial\Omega^h$ sont des sous-ensembles de Ω et $\partial\Omega$ respectivement.

Avec les hypothèses précédentes, on dira qu'une famille $(L^h)_h \in \mathcal{H}$ d'opérateurs aux différences finis est consistante par rapport à un sous-ensemble donné S du domaine d'un opérateur L tel que celui de (1.1) si

$$(4.24) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|L\phi - L^h \phi\|_{\Omega} = 0 \quad \text{pour tout } \phi \in S.$$

On a alors le critère suivant :

Théorème 5. Supposons que l'opérateur L soit tel qu'il existe une fonction ψ vérifiant (1.13)-(1.14). Soit par ailleurs $(L^h)_h \in \mathcal{H}$ une famille d'opérateurs qui satisfont le principe du maximum discret et tels que la famille $(L^h)_h \in \mathcal{H}$ soit consistante par rapport à la fonction ψ . Alors, la propriété (L_3^h) est satisfaite par la famille $(L^h)_h \in \mathcal{H}$.

Démonstration. Soit $\delta > 0$ quelconque. D'après (1.13)-(1.14), il existe une fonction ψ_δ telle que

$$L\psi_\delta(x) \geq 1+\delta, \quad x \in \Omega, \quad \text{et } \psi_\delta(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Alors l'hypothèse de consistance entraîne qu'il existe $h_0 \in \mathcal{H}$ tel que $h \leq h_0$ entraîne

$$L^h \psi_\delta(P) \geq 1, \quad P \in \Omega^h.$$

Si l'on désigne par v^h la fonction déjà utilisée au Théorème 6, on aura, pour $h \leq h_0$:

$$L^h(v^h(P) - \psi_\delta(P)) \leq 0, \quad P \in \Omega^h,$$

et le principe du maximum discret entraîne

$$v^h(P) - \psi_\delta(P) \leq 0, P \in \bar{\Omega}^h.$$

Puisque v^h est une fonction nonnégative, l'inégalité (4.17) a lieu pour $h \leq h_0$, avec

$$\mathcal{K}' = \|\psi_\delta\|_{\bar{\Omega}}.$$

On peut donc appliquer le Théorème 6, ce qui achève la démonstration (le cas $h > h_0$ n'offre pas de difficulté, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de paramètres h vérifiant cette inégalité).

Q.E.D.

Remarquons qu'il résulte de la démonstration précédente que la constante $\mathcal{K}' = \|\psi_\delta\|_{\bar{\Omega}}$ peut être choisie aussi voisine que l'on veut de la constante $\mathcal{K}$ de (1.12), pourvu que h soit suffisamment petit.

Enfin, mentionnons un résultat général de convergence pour l'approximation numérique du problème de Dirichlet (1.8)-(1.9) par le problème de Dirichlet discret (4.2)-(4.3).

Théorème 6. Soit $(L^h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille d'opérateurs aux différences finies qui vérifie la propriété (L_3^h) et qui est consistante par rapport à la solution ϕ de (1.8)-(1.9) (en supposant que cette solution existe et est unique). De plus, on suppose que les deux fonctions $f^h \in C(\Omega^h)$ et $g^h \in C(\partial\Omega^h)$ de (4.2)-(4.3) sont telles que

$$(4.25) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|f^h - f\|_{\Omega^h} = 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \|g^h - g\|_{\partial\Omega^h} = 0,$$

où f et g sont les deux fonctions de (1.8)-(1.9). Alors,

$$(4.26) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u^h - \phi\|_{\bar{\Omega}^h} = 0,$$

où $u^h \in C(\bar{\Omega}^h)$ est la solution unique du problème de Dirichlet discret (4.2)-(4.3).

Démonstration. Le problème de Dirichlet discret a une solution unique u^h pour tout $h \in \mathcal{H}$ d'après l'inégalité (4.17). La même inégalité appliquée à la fonction $(u^h - \phi) \in C(\bar{\Omega}^h)$ donne

$$\|u^h - \phi\|_{\bar{\Omega}^h} \leq \|g^h - g\|_{\partial\Omega^h} + \mathcal{J}'_h \|f^h - f\|_{\Omega^h} + \mathcal{J}'_h \|L\phi - L^h\phi\|_{\Omega^h},$$

de sorte que l'on a bien $\lim_{h \rightarrow 0} \|u^h - \phi\|_{\bar{\Omega}^h} = 0$, d'après les hypothèses (3.25) et la condition de consistance (4.24).

Q.E.D.

Pour illustrer ces résultats, considérons l'approximation du problème de Dirichlet (3.24)-(3.25) avec $a(x) \geq 0$, $0 < x < 1$, par les schémas de (3.26)-(3.27) ou de (3.29)-(3.30). La fonction $x \mapsto \psi(x) = e^{-e^x}$ vérifie (1.13)-(1.14) pour l'opérateur $x \mapsto Lu(x) = -u''(x) + a(x)u(x)$, et les opérateurs aux différences finies correspondants sont consistants avec ψ . En fait, ils sont consistants avec toute fonction de l'ensemble $S = C^2[0,1]$. Puisqu'on a vu par ailleurs qu'ils satisfont le principe du maximum discret, on peut appliquer les Théorèmes 7 et 8, et conclure que les schémas correspondants sont convergents lorsque la solution ϕ est de classe C^2 sur $[0,1]$.

Une analyse similaire montrerait que le schéma discret de (3.35)-(3.36) est convergent lorsque la solution ϕ de (3.32)-(3.33) est de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$.

5. ANALYSE "FINE" DE L'ERREUR.

Pour simplifier, on supposera dorénavant que le problème de Dirichlet discret qui approche la solution de (1.8)-(1.9) est de la forme

$$(5.1) \quad L^h u(P) = f(P), \quad P \in \Omega^h,$$

$$(5.2) \quad u(P) = g(P), \quad P \in \partial\Omega^h.$$

Autrement dit, les deux fonctions f^h et g^h de (4.2)-(4.3) sont égales aux deux fonctions f et g de (1.8)-(1.9).

Soit $(L^h)_h \in \mathcal{H}_\phi$ une famille d'opérateurs aux différences finies qui vérifient le principe du maximum discret. Supposons également que la famille $(L^h)_h \in \mathcal{H}_\phi$ soit consistante par rapport à la fonction ψ de (1.13)-(1.14). Alors il résulte du Théorème 7 que

$$(5.3) \quad \max_{P \in \Omega^h} \left\{ \sum_{Q \in \Omega^h} G^h(P, Q) \right\} \leq \mathcal{H}' \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}_\phi.$$

Par ailleurs, il résulte de l'identité (4.13) que si u^h est la solution unique de (5.1)-(5.2), on a

$$(5.4) \quad \phi(P) - u^h(P) = \sum_{Q \in \Omega^h} G^h(P, Q) \{L^h \phi(Q) - L\phi(Q)\}, \quad P \in \bar{\Omega}^h.$$

Si la solution ϕ est assez régulière, l'ensemble Ω^h peut être partitionné en k sous-ensembles deux à deux disjoints Ω_i^h , $i = 1, 2, \dots, k$, avec k indépendant de h , suivant l'ordre de l'approximation. Plus précisément, il existe k nombres $\alpha(i) \geq 0$ (en principe distincts, bien que cela ne soit pas nécessaire) tels que

$$(5.5) \quad |L^h_\phi(Q) - L_\phi(Q)| \leq K_1 h^{\alpha(i)}, \text{ pour tout } Q \in \Omega_i^h, 1 \leq i \leq k,$$

les constantes K_1 ainsi que les exposants $\alpha(i)$ étant indépendants de h . Alors on obtient, comme conséquence de (5.3)-(5.4)-(5.5), la majoration

$$(5.6) \quad \|\phi - u^h\|_{\bar{\Omega}^h} \leq C h^\alpha, \text{ avec } \alpha = \min\{\alpha(i) \mid 1 \leq i \leq k\},$$

la constante C étant indépendante de h .

En d'autres termes, il semble que ce sont les points où l'erreur locale de troncature est la plus mauvaise qui vont "imposer" l'ordre global de convergence, à savoir l'ordre de troncature qui leur correspond. Cependant, nous allons montrer par une analyse plus "fine" qu'il n'en est pas nécessairement ainsi (cf. Théorème 7).

On peut déjà remarquer, d'après (5.3)-(5.4), que l'on a la majoration

$$(5.7) \quad \|\phi - u^h\|_{\bar{\Omega}^h} \leq \sum_{i=1}^k \left\{ \sum_{P \in \bar{\Omega}^h} \left\{ \sum_{Q \in \Omega_i^h} G^h(P, Q) \right\} \right\} K_1 h^{\alpha(i)}.$$

Par conséquent, pour augmenter l'exposant α de (5.6), il faut des majorations du type

$$(5.8) \quad \max_{P \in \bar{\Omega}^h} \left\{ \sum_{Q \in \Omega_i^h} G^h(P, Q) \right\} \leq \mathcal{K}_i h^{\beta(i)}, 1 \leq i \leq k,$$

où les constantes $\mathcal{K}_i$ et les exposants $\beta_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$, sont indépendants de h . Si c'est le cas, on obtiendra, au lieu de la majoration (5.6), la majoration

$$(5.9) \quad \|\phi - u^h\|_{\bar{\Omega}^h} \leq C' h^{\alpha'}, \text{ avec } \alpha' = \min\{\alpha(i) + \beta(i) \mid 1 \leq i \leq k\},$$

la constante C' étant indépendante de h .

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi (il contient également comme cas particulier la Proposition 1 du § 4) :

Théorème 7. Soit $(L^h)_h \in \mathcal{K}_p$ une famille d'opérateurs qui satisfont le principe du maximum discret. Pour un indice $i = 1, 2, \dots, k$ donné, une inégalité telle que celle de (5.8) a lieu si et seulement si il existe pour tout $h \in H$ une fonction $v_i^h \in C(\bar{\Omega}^h)$ telle que les quatre conditions suivantes soient vérifiées :

$$(5.10) \quad L^h v_i^h(P) \geq h^{-\beta(i)}, P \in \Omega_i^h,$$

$$(5.11) \quad L^h v_i^h(P) \geq 0, P \in \Omega_j^h, 1 \leq j \leq k, j \neq i,$$

$$(5.12) \quad v_i^h(P) \geq 0, P \in \Omega^h,$$

$$(5.13) \quad \|v_i^h\|_{\bar{\Omega}^h} \leq \mathcal{K}_i.$$

Démonstration. Considérons la fonction $w_i^h \in C(\bar{\Omega}^h)$ définie par

$$w_i^h(P) = h^{-\beta(i)} \sum_{Q \in \Omega_i^h} G^h(P, Q), P \in \bar{\Omega}^h,$$

et qui est la solution unique de

$$L^h u(P) = \begin{cases} h^{-\beta(i)}, & P \in \Omega_i^h, \\ 0 & , P \in \Omega_j^h, j \neq i, 1 \leq j \leq k, \end{cases}$$

$$u(P) = 0, P \in \partial\Omega^h.$$

Si l'inégalité (5.8) est satisfaite, il suffit de prendre $v_i^h = w_i^h$, comme on le vérifie aisément.

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction v_i^h vérifiant (5.10)-(5.11)-(5.12)-(5.13). De (5.10)-(5.11), on déduit que

$$L^h(w_i^h(P) - v_i^h(P)) \leq 0, P \in \Omega^h.$$

Alors, par application du principe du maximum discret, et par (5.12), on obtient

$$w_i^h(P) \leq v_i^h(P), P \in \bar{\Omega}^h,$$

et l'inégalité (5.8) est alors une conséquence de l'inégalité (5.13).

Q.E.D.

Comme première application, considérons l'approximation numérique du problème de Dirichlet (3.24)-(3.25) par le schéma (3.26)-(3.27). Si $\phi \in C^4[0,1]$,

$$|L^h\phi(\phi) - L\phi(Q)| \leq Kh^2, \text{ pour tout } Q \in \Omega^h,$$

et on obtient une convergence d'ordre h^2 , par application de (5.6). Si maintenant on approche ce même problème par le schéma de (3.29)-(3.30), on a, pour $\phi \in C^6[0,1]$,

$$|L^h\phi(Q) - L\phi(Q)| \leq K_1 h^2 \text{ pour } Q \in \Omega_1^h = \{x_1\} \cup \{x_N\},$$

$$|L^h\phi(Q) - L\phi(Q)| \leq K_2 h^4 \text{ pour } Q \in \Omega_2^h = \bigcup_{i=2}^{N-1} \{x_i\}.$$

La majoration "grossière" de (5.6) donne donc une convergence d'ordre h^2 .

Nous allons montrer qu'en fait, la convergence est d'ordre h^4 . En effet, suivant [8], introduisons pour tout h la fonction $v_1^h \in C(\Omega^h)$ définie par

$$v_1^h(x_0) = 3-h,$$

$$v_1^h(x_i) = 6 - \frac{h}{x_i} - \frac{h}{1-x_i}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$v_1^h(x_{N+1}) = 3-h.$$

Un calcul simple montre que

$$L^h v_1^h(P) \geq h^{-2}, \quad P \in \Omega_1^h,$$

$$L^h v_1^h(P) \geq 0, \quad P \in \Omega_2^h.$$

$$v_1^h(P) \geq 0, \quad P \in \bar{\Omega}^h,$$

$$\|v_1^h\|_{\bar{\Omega}^h} \leq 6.$$

Alors le Théorème 7 entraîne que

$$\max_{P \in \bar{\Omega}^h} \left\{ \sum_{Q \in \Omega_1^h} G^h(P, Q) \right\} \leq 6 h^2,$$

et la convergence est bien d'ordre h^4 , comme le montre l'inégalité (5.9).

Comme seconde application, considérons l'approximation de (3.32)-(3.33) par le schéma de (3.35)-(3.36). Si la solution ϕ est de classe C^4 sur $\bar{\Omega}$, on a

$$(5.14) \quad |L^h \phi(Q) - L\phi(Q)| \leq K_1 h$$

si $h_1 \neq h_3$ et/ou si $h_2 \neq h_4$ (cf. (3.34)) et

$$(5.15) \quad |L^h \phi(Q) - L\phi(K)| \leq K_2 h^2,$$

si $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$. Appelons Ω_1^h l'ensemble des points de Ω^h qui correspondent à la majoration (5.14) et Ω_2^h l'ensemble des points de Ω^h qui correspondent à la majoration (5.15). Comme en [5.], introduisons la fonction $v_1^h \in C(\bar{\Omega}^h)$ définie par

$$v_1^h(P) = 1, P \in \Omega_1^h,$$

$$v_1^h(P) = 0, P \in \partial\Omega^h.$$

On vérifie alors facilement que

$$L^h v_1^h(P) \geq h^{-2}, P \in \Omega_1^h,$$

$$L^h v_1^h(P) \geq 0, P \in \Omega_2^h,$$

de sorte que, par application du Théorème 7, on obtient une erreur d'ordre h^2 , alors que la majoration "grossière" de (5.6) ne donnerait qu'une convergence d'ordre h .

Pour conclure, indiquons que l'analyse de ce § ne semble pas a priori conduire toujours aux mêmes résultats que ceux de Bramble et Hubbard, puisque (cf. [5, 7] par exemple) la "grande" matrice $\bar{A}$ associée à certains schémas d'ordre élevé n'est pas toujours monotone. En fait, Bramble et Hubbard tournent la difficulté en introduisant une fonction de Green discrète "intérieure" qui est ≥ 0 sur son domaine de définition (en d'autres termes, la matrice $\bar{A}$ n'est pas monotone, mais une sous-matrice de $\bar{A}$ est monotone). Dans ces conditions, on peut encore appliquer le critère du Théorème 9, à condition de restreindre le domaine de l'opérateur discret L^h à un sous-espace convenablement choisi de $C(\bar{\Omega}^h)$.

6. FONCTION DE GREEN VARIATIONNELLE DISCRETE.

Dans ce §, les notations utilisées sont celles qui ont été définies dans la seconde moitié du § 1.

On se donne un opérateur L vérifiant les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) et un sous-espace V_h de dimension fini N de l'espace $V = H_0^1(\Omega)$. On désigne par u_h l'unique fonction de V_h qui vérifie

$$(6.1) \quad a(u_h, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in V_h.$$

L'espace V_h étant de dimension finie, la forme bilinéaire $a(.,.)$ définit un opérateur $L_h : V_h \rightarrow L^2(\Omega)$ par

$$(6.2) \quad a(u_h, v) = (L_h u_h, v) \text{ pour tout } v \in V_h,$$

de sorte que l'on a aussi

$$(6.3) \quad L_h u_h = f.$$

L'opérateur inverse $\mathcal{G}_h = L_h^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$ existe et est continu, et le problème que l'on se pose dans ce § est celui de la représentation de l'opérateur inverse $\mathcal{G}_h$ au moyen d'un opérateur intégral, le noyau de cet opérateur étant ce que nous appellerons la fonction de Green variationnelle discrète associée au sous-espace V_h .

Tout d'abord, rappelons quelques définitions. On appellera λ_i^h , $1 \leq i \leq N$, les valeurs propres (positives) de l'opérateur L^h et ϕ_i^h , $1 \leq i \leq N$, les fonctions propres correspondantes, qui sont telles que, par définition,

$$(6.4) \quad L \phi_i^h = \lambda_i^h \phi_i^h, \quad 1 \leq i \leq N,$$

ou de façon équivalente

$$(6.5) \quad a(\phi_i^h, v) = \lambda_i^h (\phi_i^h, v) \text{ pour tout } v \in V_h, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Les fonctions propres ϕ_i^h appartiennent au sous-espace V_h et on supposera une fois pour toutes qu'elles sont orthonormalisées en ce sens que

$$(6.6) \quad a(\phi_i^h, \phi_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij} \text{ et } (\phi_i^h, \phi_j^h) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Ces valeurs propres et fonctions propres ne sont d'ailleurs pas autre chose que les valeurs propres et les fonctions propres approchées de l'opérateur L obtenues par l'intermédiaire du quotient de Rayleigh $R(u) = a(u, u)/(u, u)$, lorsqu'on cherche ses points stationnaires quand u décrit le sous-espace V_h .

On a alors le résultat d'existence suivant :

Théorème 8. Il existe une fonction $G_h : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction de Green variationnelle discrète associée au sous-espace V_h telle que la fonction $u_h \in V_h$ qui vérifie (6.1) soit donnée par

$$(6.7) \quad u_h(x) = \int_{\Omega} G_h(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega.$$

Pour tout $x \in \Omega$ fixé, la fonction $\xi \rightarrow G_h(x, \xi)$ appartient à $V_h \subset V$, et pour tout $\xi \in \Omega$ fixé, la fonction $x \rightarrow G_h(x, \xi)$ appartient à $V_h \subset V$.

La fonction G_h est donnée explicitement par

$$(6.8) \quad G_h(x, \xi) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i^h} \phi_i^h(x) \phi_i^h(\xi) \text{ pour tout } (x, \xi) \in \Omega \times \Omega,$$

où les λ_i et ϕ_i^h ont été définies en (6.5).

Démonstration. Il suffit de démontrer que

$$(6.9) \quad u_h = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i^h} (\phi_i^h, f) \phi_i^h.$$

Appelons W_h le complément orthogonal de V_h dans $L^2(\Omega)$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on peut décomposer f sous la forme

$$f = f_h + g_h, \text{ où } f_h \in V_h \text{ et } g_h \in W_h,$$

et l'on a, en vertu des relations (6.6),

$$f_h = \sum_{i=1}^N (\phi_i^h, f) \phi_i^h,$$

on aura donc démontré (6.9) si l'on démontre d'une part que

$$\mathcal{G}_h f_h = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i^h} (\phi_i^h, f) \phi_i^h,$$

or ceci résulte directement de (6.4), et d'autre part que

$$\mathcal{G}_h g_h = 0,$$

cette dernière relation revenant à démontrer que si $f \in W_h$, alors la solution correspondante de (6.1) est $u_h = 0$. Or ceci est évident, en vertu de l'unicité de cette solution.

Q.E.D.

Un cas particulier intéressant est celui où le sous-espace V_h est engendré par les N premières fonctions propres ϕ_i , $1 \leq i \leq N$, correspondant aux N premières valeurs propres λ_i , $1 \leq i \leq N$, de l'opérateur L , supposées rangées

dans l'ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$.

Théorème 9. Si V_h est engendré par les N premières fonctions propres $\phi_i \in V$, $1 \leq i \leq N$, de l'opérateur L supposées orthonormalisées en ce sens que

$$a(\phi_i, \phi_j) = \lambda_i \delta_{ij} \text{ et } (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

alors la fonction de Green variationnelle discrète correspondante est donnée par

$$G_h(x, \xi) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \phi_i(x) \phi_i(\xi).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans ce cas, les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur L_h sont respectivement égales aux N premières valeurs propres et aux fonctions propres correspondantes de l'opérateur L .

Q.E.D.

7. PRINCIPE DU MAXIMUM VARIATIONNEL DISCRET.

Par analogie avec le principe du maximum variationnel énoncé au § 1, on dira que le principe du maximum variationnel discret est vérifié dans un sous-espace donné $V_h \subset V$ lorsque (cf. § 6 pour les notations)

$$(7.1) \quad f \geq 0 \text{ entraîne } u_h \geq 0,$$

ou, ce qui revient au même, si

$$(7.2) \quad G_h \geq 0.$$

Rappelons (cf. par exemple [1] ou [41 , page 95]) que si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ et de la norme associée $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$, dont les éléments U sont des applications $U : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{O}$ est un ensemble quelconque, on dit qu'une fonction $\mathcal{G} : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est un noyau reproduisant de $\mathcal{H}$ si

- pour $X \in \mathcal{O}$ fixé, l'application $\mathcal{G}_X : \Xi \in \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{G}(X, \Xi)$ est un élément de $\mathcal{H}$, et

- pour tout $U \in \mathcal{H}$, on a

$$(7.3) \quad U(X) = (U, \mathcal{G}_X)_{\mathcal{H}}.$$

Il en résulte évidemment que

$$(7.4) \quad |U(X)| \leq C(X) \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

(cette condition nécessaire est aussi suffisante pour l'existence d'un noyau reproduisant). A l'exception du cas unidimensionnel, la fonction de Green

associée à un opérateur elliptique vérifiant (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) n'est pas un noyau reproduisant puisqu'on n'a pas d'inégalité du type (7.4) pour $n \geq 2$ ($H^1_0(\Omega) \not\subset C^0(\bar{\Omega})$ pour $n \geq 2$). Le même phénomène se retrouve dans le cas des fonctions de Green variationnelles discrètes, c'est pourquoi nous allons d'abord "modifier" l'espace V_h .

Lemme 1. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble dont les éléments X sont les classes d'équivalence des sous-ensembles mesurables de Ω , la relation d'équivalence étant

$$X_1 \sim X_2 \text{ si } \mu(X_1 \Delta X_2) = 0,$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, et $X_1 \Delta X_2$ désigne la différence symétrique de X_1 et X_2 .

A toute fonction $u \in V_h$, associons l'application $U : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(7.5) \quad U(X) = \int_X u dx \text{ pour tout } X \in \mathcal{O},$$

et soit $\mathcal{H}_h$ l'espace vectoriel formé par les fonctions U ainsi obtenues à partir des fonctions $u \in V_h$.

Enfin, faisons correspondre à la fonction de Green variationnelle discrète G_h introduite au § 6, l'application $\mathcal{G}_h : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(7.6) \quad \mathcal{G}_h(X, \Xi) = \int_X \int_{\Xi} G_h(x, \xi) dx d\xi.$$

Alors $\mathcal{H}_h$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire

$$(7.7) \quad (U, V)_{\mathcal{H}_h} = a(u, v),$$

et la fonction $\mathcal{G}_h$ est un noyau reproduisant sur l'espace $\mathcal{V}_h$.

Démonstration. Il est clair d'abord que la correspondance établie entre V_h et $\mathcal{V}_h$ est une bijection, et ensuite que l'application $(U, V) \rightarrow (U, V)_{\mathcal{G}_h}$ définie par (7.7) est un produit scalaire sur cet espace.

Etant donné un sous-ensemble mesurable X de Ω , soit ϕ_X la fonction caractéristique de cet ensemble, et soit $u_{h,X}$ l'approximation variationnelle dans le sous-espace V_h de la solution de (1.18) correspondant à $f = \phi_X$. Comme $\phi_X \in L^2(\Omega)$, on peut utiliser les résultats du § 6 et écrire

$$(7.8) \quad u_{h,X}(x) = \int_{\Omega} G_h(x, \xi) \phi_X(\xi) d\xi = \int_X G_h(x, \xi) d\xi.$$

Pour $X \in \mathcal{O}$ fixé, on a, en combinant (7.6) et (7.8) :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_h(X, \Xi) &= \int_{\Omega} \phi_X(x) dx \int_{\Xi} G_h(x, \xi) d\xi \\ &= \int_{\Xi} u_{h,X}(x) dx. \end{aligned}$$

On voit ainsi que l'application $\mathcal{G}_{h,X}: \Xi \in \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{G}_h(X, \Xi)$ est un élément de $\mathcal{V}_h$ puisqu'elle est associée, comme en (7.5), à la fonction $u_{h,X}$ de V_h .

Soit maintenant U une fonction quelconque de $\mathcal{V}_h$, qui correspond à une fonction u de $\mathcal{V}_h$ comme en (7.5). On a, pour tout $X \subset \Omega$,

$$(U, \mathcal{G}_{h,X})_{\mathcal{V}_h} = a(u, u_{h,X}) = (u, \phi_X) = \int_X u dx = U(X),$$

ce qui est précisément la propriété (7.3).

Q.E.D.

On peut alors démontrer le

Théorème 10. Soit V_h un sous-espace de dimension finie de V . Alors le principe du maximum variationnel discret est vérifié dans le sous-espace V_h si

et seulement si étant donné une fonction quelconque $u \in V_h$, il existe une fonction $\tilde{u} \in V_h$ telle que

$$(7.9) \quad \tilde{u}(x) \geq |u(x)| \text{ pour presque tout } x \in \Omega,$$

et

$$(7.10) \quad a(\tilde{u}, \tilde{u}) \leq a(u, u).$$

Démonstration. D'après un résultat de Aronszajn et Smith [1], un noyau reproduisant $\mathcal{Q}$ défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est ≥ 0 si et seulement si à toute fonction $U \in \mathcal{H}$, on peut associer une fonction $\tilde{U} \in \mathcal{H}$ telle que

$$(7.11) \quad \tilde{U}(X) \geq |U(X)| \text{ pour tout } X \in \mathcal{O}$$

et

$$(7.12) \quad (\tilde{U}, \tilde{U})_{\mathcal{H}} \leq (U, U)_{\mathcal{H}}.$$

Il suffit alors de remarquer l'équivalence de (7.9) avec (7.11) et celle de (7.10) avec (7.12).

Q.E.D.

Remarquons qu'on peut démontrer la condition suffisante du Théorème 10 d'une autre façon, plus simple. En effet, soit $f \in L^2(\Omega)$ donné avec $f \geq 0$, et soit u_h l'approximation variationnelle correspondante. Au lieu de caractériser la fonction u_h par (6.1), on peut également la caractériser [33] comme la fonction (unique) de V_h qui rend minimale la fonctionnelle

$$(7.13) \quad u \in V_h \rightarrow F(u) = a(u, u) - 2(f, u),$$

lorsque u parcourt V_h . Par hypothèse, il existe $\tilde{u}_h \in V_h$ tel que

$$(7.14) \quad \tilde{u}_h(x) \geq |u_h(x)| \text{ p.p. dans } \Omega, \text{ et } a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) \leq a(u_h, u_h).$$

D'après l'expression (7.13) de la fonctionnelle,

$$F(\tilde{u}_h) - F(u_h) = a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) - a(u_h, u_h) + 2(f, u_h - \tilde{u}_h).$$

Alors l'hypothèse $f \geq 0$ couplée avec (7.14) entraîne que $F(\tilde{u}_h) \leq F(u_h)$.

Comme la fonction u_h rend minimale la fonctionnelle, on en déduit que

$F(\tilde{u}_h) = F(u_h)$ et donc que $\tilde{u}_h = u_h$, d'après l'unicité de la fonction minimisante. Comme $\tilde{u}_h$ est ≥ 0 , il en résulte que $u_h \geq 0$, ce qui démontre notre assertion.

Comme exemple d'application du Théorème 12, considérons le problème suivant. On cherche la solution de

$$(7.15) \quad -\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(7.16) \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

On suppose que la frontière $\partial\Omega$ est un complexe simplicial. Dans ces

conditions, il en résulte qu'on peut établir une triangularisation $\mathcal{C}$ sur $\bar{\Omega}$. De façon précise, le compact $\bar{\Omega}$ est la réunion d'un nombre fini de n -simplexes $\mathcal{S}_i$, $1 \leq i \leq N$, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et qui sont tels que, étant donné un n -simplexe de $\mathcal{C}$, chacune de ses $(n-1)$ -face est soit un sous-ensemble de $\partial\Omega$, soit une $(n-1)$ -face d'un autre n -simplexe de $\mathcal{C}$. Pour la construction effective d'une telle triangularisation, voir [19 § III.1].

On définit l'espace V_h comme étant l'ensemble des fonctions u telles que

(a) u est une fonction affine des coordonnées sur chacun des n -simplexes de la triangularisation $\mathcal{T}$,

(b) $u \in C^0(\bar{\Omega})$,

(c) $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

L'espace V_h est donc un sous-espace de dimension finie de V . On peut alors démontrer le

Théorème 11. Le principe du maximum variationnel discret est vérifié dans le sous-espace V_h , pourvu que les n -simplexes de la triangularisation aient leurs "angles" aigus (voir la définition précise de cette condition dans la démonstration; inégalités (7.19)).

Démonstration. D'après le Théorème 10, étant donné une fonction $u \in V_h$, on doit trouver une fonction $\tilde{u} \in V_h$ telle que

$$(7.17) \quad \tilde{u}(x) \geq |u(x)| \text{ pour } x \in \bar{\Omega},$$

$$(7.18) \quad a(\tilde{u}, \tilde{u}) \leq a(u, u),$$

où

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n [D_i u]^2 dx.$$

On va montrer que la fonction $\tilde{u} \in V_h$ définie comme étant la fonction qui prendra les valeurs $|u(a)|$ aux sommets a des différents n -simplexes de la triangularisation répond à la question. Pour cela, considérons un n -simplexe

donné $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$, de sommets a_i , $1 \leq i \leq n+1$, et appelons $\lambda_i(x)$ les coordonnées barycentriques d'un point quelconque $x \in R^n$ par rapport aux sommets a_i . On a donc

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u(a_i) \lambda_i(x) \text{ et } \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} |u(a_i)| \lambda_i(x), \text{ pour tout } x \in \mathcal{S}.$$

Comme $\lambda_i(x) \geq 0$ si $x \in \mathcal{S}$, il en résulte que l'inégalité (7.17) est vérifiée en tout point de $\mathcal{S}$, et par suite, sur $\bar{\Omega}$.

Pour que la seconde inégalité (7.18) soit vérifiée, il suffit que l'on ait (en désignant par $Du(x)$ le vecteur de composantes $D_1 u(x), \dots, D_n u(x)$, et par $\langle \dots \rangle$ le produit scalaire dans R^n) :

$$\langle \tilde{D}u, \tilde{D}u \rangle \leq \langle Du, Du \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} |u(a_i) \cdot u(a_j)| \langle D\lambda_i, D\lambda_j \rangle \leq \sum_{i,j=1}^{n+1} u(a_i) u(a_j) \langle D\lambda_i, D\lambda_j \rangle,$$

et cette inégalité sera vérifiée si l'on a

$$(7.19) \quad \langle D\lambda_i, D\lambda_j \rangle \leq 0, \text{ pour tout } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n+1.$$

Les inégalités ci-dessus sont susceptibles d'une interprétation géométrique.

En effet, si l'on appelle b_i la projection du sommet a_i sur la $(n-1)$ face opposée, le vecteur $D\lambda_i$ est homothétique au vecteur $b_i a_i$, le rapport d'homothétie étant > 0 . Dans le cas particulier $n = 2$, les n -simplexes de $\mathcal{S}$ sont des triangles, et la condition (7.19) est vérifiée si et seulement si tous les angles des triangles sont $\leq \frac{\pi}{2}$.

Q.E.D.

8. CAS OU LE SOUS-ESPACE V_h EST ENGENDRE PAR LES N PREMIERES FONCTIONS PROPRES.

Les notations utilisées sont celles de la fin du § 1 et du § 6. Dans tout ce §, le sous-espace V_h est engendré par les N premières fonctions propres $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ de l'opérateur L , supposées orthonormalisées comme en (1.24).

Commençons par un résultat de convergence.

Théorème 12. On a la majoration :

$$(8.1) \quad \|u_h - u\|_V \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} \|f\|,$$

où C est une constante indépendante de N . Par suite, $u_h \rightarrow u$ dans V si $N \rightarrow +\infty$.

Démonstration. L'opérateur $\mathcal{G} - \mathcal{G}_h$ considéré comme agissant de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact et symétrique, de sorte que

$$\|\mathcal{G} - \mathcal{G}_h\|_{\mathcal{L}(L^2; L^2)} = \frac{1}{\lambda_{N+1}}.$$

Pour évaluer la quantité

$$\|\mathcal{G} - \mathcal{G}_h\|_{\mathcal{L}(L^2; V)} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|(\mathcal{G} - \mathcal{G}_h)f\|_V}{\|f\|},$$

remarquons d'abord que l'on a, d'après (1.16),

$$(\|\mathcal{G} - \mathcal{G}_h\|_V)^2 \leq \frac{1}{K_1} a((\mathcal{G} - \mathcal{G}_h)f, (\mathcal{G} - \mathcal{G}_h)f).$$

Par ailleurs, on a par définition des opérateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_h$,

$$a(\mathcal{G}f, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in V,$$

$$a(\mathcal{G}_h f, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in V_h,$$

de sorte que l'on a, en particulier,

$$\begin{aligned} a(\ell f, \ell f) &= (f, \ell f), \\ a(\ell f, \ell_h f) &= a(\ell_h f, \ell_h f) = (f, \ell_h f), \end{aligned}$$

d'où

$$a((\ell - \ell_h)f, (\ell - \ell_h)f) = (f, (\ell - \ell_h)f).$$

Dans ces conditions, on a pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$\frac{\|(\ell - \ell_h)f\|_V}{\|f\|} \leq \frac{1}{\sqrt{K_1}} (\|(\ell - \ell_h)\|_{\mathcal{L}(L^2; L^2)})^{1/2},$$

de sorte que finalement,

$$\|(\ell - \ell_h)\|_{\mathcal{L}(L^2; V)} \leq \frac{1}{\sqrt{K_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{N+1}}},$$

ce qui démontre (8.1).

Q.E.D.

On retrouve ainsi les résultats "optimaux" d'Aubin [2].

Une autre question que l'on peut se poser lorsqu'on travaille dans le sous-espace V_h concerne la validité du principe du maximum. C'est pour l'instant un problème ouvert, et le premier résultat dans cette direction a été démontré dans [18], dans un cas particulier. Nous reproduisons ce résultat :

Proposition 2. Dans le cas particulier où $n = 1$ et $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, le principe du maximum variationnel discret a lieu dans le sous-espace V_h .

Démonstration. On a l'expression explicite de la fonction G^h dans ce cas particulier, à savoir

$$G_h(x, \xi) = \sum_{p=1}^N \frac{2}{\pi^2 p^2} \sin p\pi x \sin p\pi \xi = \int_{x-\xi}^{x+\xi} \left\{ \sum_{p=1}^N \frac{\sin p\pi t}{p\pi} \right\} dt,$$

et il s'agit donc de démontrer que

$$G_h(x, \xi) \geq 0 \text{ pour } (x, \xi) \in [0,1] \times [0,1].$$

Comme on a $G_h(x, \xi) = G_h(\xi, x)$, et $G_h(x, \xi) = G_h(x, \xi) = G_h(1-\xi, 1-x)$, on peut se restreindre à la région $0 \leq x-y \leq x+y \leq 1$, de sorte que G_h est nonnégative si et seulement si

$$\sum_{p=1}^N \frac{\sin p\theta}{p} \geq 0 \text{ pour tout } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

or cette dernière inégalité est classique (cf. par exemple [36 , p. 78]).

Q.E.D.

Enfin, indiquons un autre problème ouvert, celui de l'approximation monotone : dans certains cas, il est en effet important d'obtenir une approximation $v_h \in V_h$ (V_h = sous-espace quelconque) de la solution u qui vérifie de surcroît une inégalité du type

$$(8.2) \quad u \geq v_h \quad (\text{ou } u \leq v_h).$$

L'approximation u_h que nous avons considérée jusqu'à maintenant n'a aucune raison de satisfaire l'inégalité ci-dessus, même si le principe du maximum variationnel discret est vérifié. Une inégalité du type $u \geq u_h$ correspondrait d'ailleurs au principe du maximum dans le sous-espace W_h complémentaire du sous-espace V_h . Là encore, nous avons pu seulement obtenir un résultat partiel dans cette direction, qui est peut-être susceptible d'être généralisé.

Appelons w (resp. w_h) la solution (resp. la solution approchée) corres-

pondant à $f = 1$, de sorte que

$$a(w, v) = (1, v) \text{ pour tout } v \in V,$$

$$a(w_h, v) = (1, v) \text{ pour tout } v \in V_h.$$

Soit (h) une suite de paramètres ayant 0 pour limite, et soit (ε_h) une suite de paramètres réels assujettis à la condition

$$(8.3) \quad \varepsilon_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Alors, si $\overline{U_{V_h}} = V$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0,$$

et la suite de fonctions de V_h définies par

$$(8.4) \quad v_h = u_h - \varepsilon_h w_h$$

est elle aussi telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\|_V = 0,$$

puisque la suite $(\|w_h\|_V)$ est bornée.

Considérons maintenant le cas où le sous-espace V_h est engendré par les N premières fonctions propres. Comme les fonctions propres sont orthonormalisées au sens des deux produits scalaires $(\cdot, \cdot)$ et $a(\cdot, \cdot)$, on peut décomposer un élément quelconque $v \in V$, $f \in L^2(\Omega)$ et la fonction 1, sous la forme

$$v = v_h + v_h^\perp, \quad f = f_h + f_h^\perp, \quad \text{et} \quad 1 = l_h + l_h^\perp.$$

avec $v_h, f_h, l_h \in V_h$ et $v_h^\perp, f_h^\perp, l_h^\perp \in W_h$, où W_h est le complément orthogonal de V_h pour les deux produits scalaires. Dans ces conditions, on a pour un

élément arbitraire $v \in V$:

$$\begin{aligned} a(u-v_h, v) &= a(u, v) - a(u_h, v) + \epsilon_h a(w_h, v) \\ &= (f, v) - a(u_h, v_h) + \epsilon_h a(w_h, v_h). \end{aligned}$$

Par orthogonalité, on obtient

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= (f, v_h) = (f_h, v), \\ a(w_h, v_h) &= (1, v_h) = (1_h, v), \end{aligned}$$

d'où finalement

$$(8.5) \quad a(u-v_h, v) = (f_h^\perp + \epsilon_h 1_h, v).$$

Si l'on est dans le cas particulier de la Proposition 2, on sait que $f_h^\perp$ (resp. 1_h) converge uniformément vers 0 (resp. 1.). Alors le choix

$$\epsilon_h = 2 \|f_h\|_\infty$$

(par exemple) entraîne que pour $h \leq h_0$,

$$f_h + \epsilon_h 1_h \geq 0.$$

Si le principe du maximum variationnel est vérifié, alors la relation (8.5) varie pour tout $v \in V$ montre que

$$u \geq v_h \quad \text{pour } h \leq h_0.$$

Comme par ailleurs la condition (8.3) est vérifiée, on obtient ainsi une approximation monotone convergente.

Il est utile d'observer que, pratiquement, on peut calculer ϵ_h , puisque $f_h^\perp = f - f_h$.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] ARONSZAJN, N., et K. T. SMITH : Characterizations of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions. Amer. J. Math. 79 (1957), 611-622.
- [2] AUBIN, J. P. : Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 21 (1967), 599-637.
- [3] BERS, L., F. JOHN, et M. SCHECHTER : Partial Differential Equations. Interscience Publishers, New-York, 1964.
- [4] BRAMBLE, J. H. : Error estimates for difference methods in forced vibration problems. SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 1-12.
- [5] BRAMBLE, J. H., et B. E. HUBBARD : On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation. Numer. Math. 4 (1962), 313-327.
- [6] BRAMBLE, J. H., et B. E. HUBBARD : A priori bounds on the discretization error in the numerical solution of the Dirichlet problem. Contributions to Differential Equations, Vol. II, pp. 229-252. John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1963.
- [7] BRAMBLE, J. H., et B. E. HUBBARD : A theorem on error estimation for finite difference analogues of the Dirichlet problem for elliptic equations. Contributions to Differential Equations, Vol. II, pp. 319-340. John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1963.
- [8] BRAMBLE, J. H., et B. E. HUBBARD : On a finite difference analogue of an elliptic boundary problem which is neither diagonally dominant nor of non-negative type. J. Math. and Phys. 43 (1964), 117-132.
- [9] BRAMBLE, J. H., et B. E. HUBBARD : New monotone type approximations for elliptic problems. Math. Comput. 18 (1964), 349-367.
- [10] BRAMBLE, J. H., et B. E. HUBBARD : A finite difference analog of the Neumann problem for Poisson's equation. SIAM J. Numer. Anal. 2 (1965), 1-14.

- [11] BRAMBLE, J. H., et B. E. HUBBARD : Approximations of solutions of mixed boundary value problems for Poisson's equation by finite differences. J. Assoc. Comput. Mach. 12 (1965), 114-123.
- [12] BRAMBLE, J. H., B. E. HUBBARD, et M. ZLAMAL : Discrete analogues of the Dirichlet problem with isolated singularities. SIAM J. Numer. Anal. 5 (1968), 1-25.
- [13] CEA, J. : Approximation variationnelle des problèmes aux limites, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14 (1964), 345-444.
- [14] CIARLET, P.G. : Discrete maximum principle for finite difference operators, à paraître dans Aequationes Math.
- [15] CIARLET, P. G. : Discrete variational Green's function. I, Aequationes Math. 4 (1970), 74-82.
- [16] CIARLET, P. G., M. H. SCHULTZ, et R. S. VARGA : Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. I. One dimensional problem, Numer. Math. 9 (1967), 394-430.
- [17] CIARLET, P. G., M. H. SCHULTZ, et R. S. VARGA : Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. III. Eigenvalue problems, Numer. Math. 12 (1968), 120-133.
- [18] CIARLET, P. G., et R. S. VARGA : Discrete variational Green's function. II. One dimensional problem, à paraître dans Numer. Math.
- [19] COATMELEC, C. : Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 83 (1966), 271-341.
- [20] COLLATZ, L. : Functional Analysis and Numerical Mathematics. Academic Press, New-York and London, 1966.
- [21] COLLATZ, L. : The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd. ed., Springer-Verlag, New-York, 1966.

- [22] COURANT, R., et D. HILBERT : Methods of Mathematical Physics, Vol. II. Interscience Publishers, New-York, 1962.
- [23] COURANT, R., et D. HILBERT : Methods of Mathematical Physics, Vol. I, Interscience, New-York, 1953.
- [24] FORSYTHE, G.E., et W. R. WASOW : Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1960.
- [25] HUBBARD, B. E. : Remarks on the order of convergence in the discrete Dirichlet problem. Numerical Solution of Partial Differential Equations, pp. 21-34. Academic Press, New-York, 1966.
- [26] KELLOG, R. B. : Difference equations on a mesh arising from a general triangulation. Math. Comput. 18 (1964), 203-210.
- [27] KELLOG, R. B. : An error estimate for elliptic difference equations on a convex polygon. SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 79-90.
- [28] LIONS, J. L. : Cours d'Analyse Numérique.
- [29] LIONS, J. L. : Equations Differentielles Opérationnelles, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [30] MALGRANGE, B. : Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955), 3-86.
- [31] McALLISTER, G. T. : Quasilinear uniformly elliptic partial differential equations and difference equations. SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 13-33.
- [32] MAC NEAL, R. H. : An asymmetrical finite difference network. Quart. Appl. Math. 11 (1953), 295-310.
- [33] MIKHLIN, S. G. : Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon Press, Oxford, 1964.

- [34] MIRANDA, C. : Equazioni alle derivate parziali de tipo ellittico, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
- [35] NEČAS, J. : Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris, 1967.
- [36] PÓLYA, G., et G. SZEGÖ : Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer, Berlin, 1954.
- [37] PRICE, H. S. : Monotone and Oscillation Matrices Applied to Finite Difference Approximations. Doctoral Thesis, Case Institute of Technologyn 1965.
- [38] PRICE, H. S. : Monotone and oscillation matrices applied to finite difference approximations. Math. Comp. 22 (1968), 489-516.
- [39] VARGA, R. S. : Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [40] VARGA, R. S. : On a discrete maximum principle. SIAM J. Numer. Anal. 3 (1966), 355-359.
- [41] YOSIDA, K. Y. : Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

UNIVERSITE de PARIS VI
II, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE
Bureau des Enseignements du 3e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

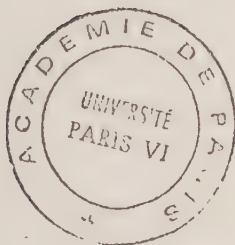
PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT ES SCIENCES
THESE DE : SCIENCES MATHÉMATIQUES

NOM : . . CIARLET . . .
Prénoms : . PHILIPPE . . .
né le 14 OCTOBRE 1938 à . . PARIS . . . Dép^t : . . .

1ère THESE : FONCTIONS DE GREEN DISCRETES ET PRINCIPE DU MAXIMUM . .
. . DISCRET . . .

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : . . THEORIE DE L'ECLATEMENT . . .
DES TOURBILLONS EN FLUIDE PARFAIT D'APRES BROOKE Benjamin . . .



Vu et Approuvé

PARIS, le 19 Novembre 71.

Le Président

de l'Université de PARIS VI

A. HERPIN

